DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA[1]

Algebraic Education

Wilhelmi, M.R.

Universidad Pública de Navarra

Resumen

La Didáctica del álgebra es un área prioritaria en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. Así, en congresos nacionales e internacionales se reserva un grupo de trabajo específico para esta área. La comunidad Early Algebra se ha ido asentando en los últimos treinta años, ha aportado fundamentación teórica y datos experimentales sobre la conveniencia de superar la oposición aritmético-algebraico y sobre la necesidad de estructurar el currículo como un continuo epistemológico, antes que un paso de una actividad meramente aritmética (en Educación Primaria) a otra donde el álgebra se presenta como un producto acabado (en Educación Secundaria). La Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas aporta un modelo de la proporcionalidad, que sobrepasa el desarrollo numérico clásico en Educación Primaria, pero sin introducir una formalización propia de la Educación Secundaria.

Palabras clave: *Didáctica del álgebra, Early Algebra, Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas (TSDM), proporcionalidad.*

Abstract

The Algebraic Education is a priority area in research in Mathematics Education. Thus, national and international congresses reserve a specific working group for this area. The Early Algebra community has been established in the last thirty years, has provided theoretical foundation and experimental data on the desirability of overcoming arithmetic-algebraic opposition and on the need to structure the curriculum as an epistemological continuum, rather than a step of an activity merely arithmetic (in Primary Education) to another where algebra is presented as a finished product (in Secondary Education). The Theory of Didactical Situations in Mathematics provides a model of proportionality, which goes beyond the classical numerical development in Primary Education, but without introducing a typical formalization of Secondary Education.

Keywords: *Algebraic Education, Early Algebra, Theory of Didactical Situations in Mathematics (TSDM), proportionality.*

DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA COMO DOMINIO DE INVESTIGACIÓN

Los congresos internacionales principales tienen grupos de investigación en Didáctica del álgebra. El PME (http://www.igpme.org/) dedica el dominio de investigación 1 al Álgebra y a las estructuras algebraicas; el CERME (http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/), el grupo de trabajo temático 3 al Pensamiento algebraico.

Además, en los congresos, simposios, jornadas, etc., nacionales e internacionales, además de estos grupos específicos, el álgebra es un tópico utilizado de forma extensa para ejemplificar o articular discursos vinculados a otros grupos de trabajo de interés disciplinar general (argumentación y prueba, visualización, representación, modelos, etc.) o de intervención pedagógica o didáctica (evaluación, enseñanza y aprendizaje con tecnología, desarrollo profesional docente, etc.).

Wilhelmi, M.R. (2017). Didáctica del Álgebra. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 17-23). Zaragoza: SEIEM.

En la SEIEM, el desarrollo de la Educación matemática relacionada con la aritmética y el álgebra se integra en el Grupo de trabajo del Pensamiento Numérico y Algebraico y, de igual manera, forma parte de propuestas de otros grupos de interés. Además, en los últimos 5 años, de 2012 a 2016, la Sociedad ha impulsado dos seminarios específicos; a saber:

— Seminario II: Fines de la investigación en pensamiento algebraico (Paralea, Castro y Puig, 2012).

— Seminario I: Investigaciones sobre pensamiento numérico y algebraico (Lupiáñez, González Marí, Gil, Arnau y Moreno, 2015).

Además, en los Simposios de la SEIEM 2012-2016, el número de comunicaciones dedicadas expresamente al álgebra o que utilizan este tópico para ejemplificar el discurso, con referencias explícitas a publicaciones científicas sobre la Didáctica del álgebra son abundantes y determinan un interés amplio de los investigadores por este campo (Tabla 1).

Tabla 1. Didáctica del álgebra en los Simposios de la SEIM 2012-2016

Año	2012	2013	2014	2015	2016
Álgebra como tópico	5	4	7	5	3
Álgebra como ejemplo	13	9	9	15	4
Total comunicaciones	39	43	46	43	41
Seminario Didáctica del álgebra	Sí	No	No	Sí	No

Este breve panorama es por sí mismo suficiente para poder afirmar que la Didáctica del álgebra tiene un interés vigente en la comunidad de investigadores.

Este seminario describe este campo de investigación desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, http://www.atd-tad.org/) y del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y de la instrucción matemáticos (EOS, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/). Este desarrollo estará a cargo de Josep Gascón (Universitat Autònoma de Barcelona) y de Juan D. Godino (Universidad de Granada), respectivamente.

En este documento, en primer lugar, se hace una breve descripción de la Didáctica del álgebra desde otras perspectivas teóricas; en concreto, desde la denominada perspectiva *Early Algebra* y desde la Teoría de Situaciones Didácticas en Matemáticas (TSDM, http://guy-brousseau.com/), origen del Grupo "Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica (DMDC)". En segundo lugar, se hace un sucinto análisis de las similitudes y diferencias de la TAD y el EOS, sin ánimo exhaustivo, como detonante que sirva a la vez de introducción a los dos enfoques que vertebran el seminario y al debate posterior.

EARLY ALGEBRA

Kieran, Pang, Schifter y Ng (2016) hacen un estudio del origen, estado y perspectivas de la investigación en el campo del *early algebra*, mostrando la evolución teórica y del desarrollo práctico en procesos de enseñanza y aprendizaje con estudiantes de entre 6 y 12 años. Así, en la perspectiva del *early algebra* (EA) se sostiene que "las relaciones matemáticas, los patrones y las estructuras aritméticas están en el centro de la actividad algebraica temprana" (p. 1). Además, se justifica la importancia central del lenguaje natural; no en vano, en esas edades los niños están en plena adquisición y desarrollo del lenguaje. Sus capacidades lingüísticas y comunicativas condicionan, pues, los procesos de representación y argumentación, para justificar, convencer al igual y para operativizar el pensamiento.

La premisa esencial del EA es que el paso de la aritmética al álgebra es complejo y que, por lo tanto, de cara a diseñar procesos de enseñanza y aprendizaje mejor adaptados a las restricciones en la instrucción y cognitivas, es preciso "adelantar" ciertos aspectos algebraicos en las etapas tempranas. Para ello, desde el EA se intenta responder a la pregunta: ¿qué características describen el pensamiento algebraico?

La comunidad EA, ahora asentada tras treinta años de fundamentación teórica y aportación de datos experimentales, ha sostenido la conveniencia de superar la oposición aritmético-algebraico y la necesidad de estructurar el currículo como un continuo epistemológico, antes que un paso de una actividad meramente aritmética (en Educación Primaria) a otra donde el álgebra se presenta como un producto acabado (en Educación Secundaria). Así, ya en 1996 Kieran propone un modelo de la actividad algebraica, que se desarrolla en tres niveles:

- *Nivel 1.* Actividad matemática que involucra objetos y expresiones algebraicas. Por ejemplo, resolución de problemas que precisen ecuaciones, patrones numéricos o geométricos, relaciones numéricas.
- *Nivel 2*. Actividad que suponga transformaciones de objetos basadas en reglas. Por ejemplo, manipulación de polinomios, factorización o expansión, transformación de ecuaciones y, en general, progreso mediante expresiones equivalentes.
- *Nivel 3*. Actividad en la que el álgebra es una herramienta al servicio de otro propósito. Por ejemplo, en la modelización, el estudio del cambio en un contexto, el análisis de relaciones, la justificación de reglas.

Estos niveles no tienen una mera disposición temporal, sino que vertebran los usos y concreciones según las diversas perspectivas teóricas y prácticas. Por otro lado, el tercer nivel es más que una manipulación simbólica, siendo precursor de actividades algebraicas posteriores.

> Las actividades globales de meta-nivel de álgebra pueden ser consideradas no sólo como parte de la actividad algebraica simbólico-literal, sino también como precursoras de actividades generacionales y transformacionales que serán puestas en juego más adelante (Kieran, 2004, 148).

Kieran (2004) hace una revisión de propuestas en diferentes países o contextos: en Estados Unidos, según el NCTM; en el desarrollo de las matemáticas en China, Singapur y Korea; el currículo según Davydov (2000) o la propuesta por *The Royal Society* (Sutherland, 1997). Se observan diferencias sustanciales entre las propuestas, aspecto que es también refrendado por Schmittau y Morris (2004) en relación con los Estándares y Principios del NCTM y la propuesta de Davydov.

> Las diferencias descritas […] reflejan diferencias fundamentales en las bases para desarrollar la comprensión algebraica, y suposiciones divergentes sobre los detonantes del pensamiento algebraico [...] Las diferencias con el currículo de los Estados Unidos son lo suficientemente profundas como para constituir un cambio de paradigma (p. 85).

Así, las diferencias entre las diferentes propuestas no pueden ser resumidas en la elección, secuencia y planificación temporal de las actividades, sino sobre todo en las propiedades que se atribuye a dichas actividades para el desarrollo del razonamiento algebraico por los sujetos.

Hay, por supuesto, aspectos que son referidos por las distintas perspectivas como claves para poder gestionar la actividad de los estudiantes. La noción de igualdad (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007) es clave. Así, Cai y Knuth (2011), citando a Kieran, establecen que la ruptura semiótica de la igualdad es uno de los 5 aspectos que es preciso tomar en consideración en el tránsito de la aritmética al álgebra.

> La transición de la aritmética al álgebra es difícil para muchos estudiantes, incluso para aquellos estudiantes que son bastante competentes en aritmética, ya que a menudo requiere que ellos piensen de maneras muy diferentes [...] Kieran, por ejemplo, sugirió [5] cambios del pensamiento aritmético al algebraico: [...] (5) Una reorientación del significado del signo igual: de un significante para calcular, a un símbolo que denota una relación de equivalencia entre cantidades (p. ix).

Por todo ello, este seminario parte de una doble premisa:

- *Hipótesis divergente*. Dado el carácter multidimensional de los contextos y procesos educativos, las diferentes perspectivas teóricas en Didáctica de las matemáticas proponen medios distintos de control y funcionamiento de los sistemas didácticos, lo que imposibilita el surgimiento de una teoría única o que una se revele más eficaz, pertinente o con un mayor poder heurístico, tanto para el desarrollo de los aprendizajes como para la comprensión de cómo se lleva a cabo la adquisición de éstos.

- *Hipótesis convergente*. Dada la naturaleza relacional de las matemáticas y la constatación empírica de actividad matemática equiparable en contextos educativos diversos, con docentes distintos y currículos diferenciados, es posible identificar un campo común de intervención, donde criterios equiparables de gestión de los sistemas didácticos son asumibles y, por lo tanto, las distintas perspectivas teóricas son pertinentes con la debida meta-transposición didáctica que las haga inteligibles y eficaces.

PROPORCIONALIDAD EN LA TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS EN MATEMÁTICAS

La TSDM sostiene la hipótesis según la cual todo saber matemático puede ser modelizado por una *situación didáctica fundamental* (Brousseau, 1998). Toda situación didáctica comienza con una consigna, es decir, la trasmisión de la tarea a los alumnos en un lenguaje comprensible. Los alumnos tendrán que contar con una *estrategia de base*, que permita dar una respuesta que necesariamente se revele inadecuada. Así, los alumnos obtienen información inteligible que, en oposición al *medio antagonista*, les permite hacer evolucionar sus conocimientos hacia el saber que se desea enseñar.

La *situación del puzle* fue elaborada para la introducción de la proporcionalidad con fracciones. Se presenta a los alumnos la Figura 1.

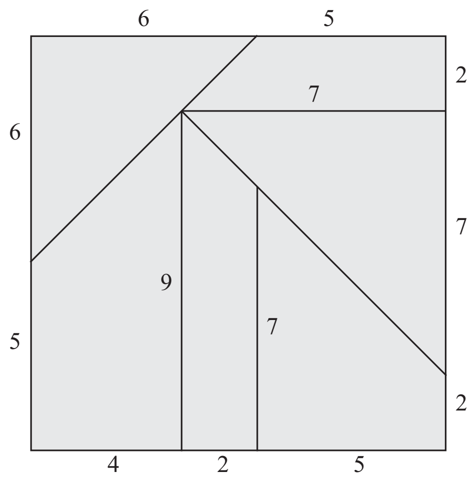

Figura 1. Puzle (Brousseau y Brousseau, 1987, p. 137)

Con la Figura 1 a la vista, los estudiantes reciben la consigna:

> Aquí podéis ver un puzle. Vais a fabricar unos parecidos, más grandes que los modelos respetando la regla siguiente: el segmento que mide 4 cm en el modelo deberá medir 7 cm en vuestra producción.
>
> Yo doy un puzle por equipo. Cada alumno tendrá que hacer una o dos piezas. Cuando terminéis tendréis que poder construir las mismas figuras que con el modelo (Brousseau y Brousseau, 1987, p, 138).

La actividad que sigue es por todos bien conocida:

- *Situación 1*: *utilización de estrategias de base*. Por orden de frecuencia en la aparición en los grupos, se tienen las siguientes estrategias: 1) construir cada pieza por separado, añadiendo 3 cm a todos los lados de todas las piezas; 2) construir un cuadrado mayor por adición también de 3 cm en los segmentos que componen los lados, lo que da dos lados de 17 cm y otros dos de 20 cm; 3) utilizar, en la construcción de las nuevas piezas, la regla “ 2 × longitud segmento – 1” (ya que 7 = 2 × 4 – 1).

- *Situación 2: obtención de la reducción a la unidad*. Consigna:

  > Los diferentes procedimientos que habéis utilizado ayer para rehacer el puzle no son buenos, porque no os han permitido construirlo correctamente. Os habéis dado cuenta de que sumando tres o haciendo "(×2) – 1" , las medidas no son correctas. En esta sesión, vais a intentar encontrar las medidas buenas que permitirán construir el puzle" (p. 141).

  El maestro (o, eventualmente, un alumno que ha tenido éxito en la sesión 1) dispone los valores:

  $4 \rightarrow 7$
  $5 \rightarrow$
  $6 \rightarrow$
  $2 \rightarrow$
  $9 \rightarrow$
  $7 \rightarrow$

  Los alumnos establecen, aunque no es necesaria, la proposición: $8 \rightarrow 14$; que motiva la afirmación: "¡Necesitamos la imagen del uno!... ¡Sí, eso permitiría encontrar todas las otras!".

  La sesión prosigue con todos los cálculos necesarios, no sin errores (por ejemplo, tomar 1,7 como constante de proporcionalidad, en lugar de 1,75), hasta la construcción del puzle y la comprobación empírica de que es correcto, es decir, que las piezas encajan.

- *Situación 3: generalización.* Consigna:

  > Hemos agrandado un puzle. Para ello, teníamos un modelo del que conocíamos las medidas y una información sobre una de ellas: a 4 le corresponde 7. ¿Qué habéis buscado? (p. 145).

  Los alumnos responden rápidamente: "es preciso encontrar la imagen de 1". El maestro pregunta entonces: "Si 9 tiene por imagen 11, ¿cuál sería la imagen de 1?".

  En fases posteriores de la situación, se buscan las imágenes de fracciones, haciendo el cálculo con ellas, sin "transformarlas" a números decimales. El avance de la clase es laborioso y requiere finalmente ejercicios de "entrenamiento".

Las consignas al inicio de cada sesión sirven para controlar las producciones *individuales*, evitando así la pérdida de sentido por los alumnos, y para el desarrollo *grupal*. Asimismo, el control busca que toda la clase comparta unos conocimientos que permitan actuar conjuntamente. Estas intervenciones pueden repetirse a lo largo de la sesión, permitiendo al docente modular la exigencia de la situación *adidáctica* que afrontan los niños.

> [Nota] Es muy importante hacer regularmente "un alto" con los niños: recordar o hacer recordar qué problema había sido propuesto, qué preguntas había provocado el problema. Es necesario que los alumnos sepan lo que están resolviendo. El maestro puede incluso, alguna vez, recordarlo durante la actividad: de hecho, muchos niños, mientras buscan 'medios', 'soluciones' de un problema, olvidan a menudo el 'porqué' de sus cálculos (p. 145).

En la sección siguiente se analizan diversos aspectos clave de la situación del puzle desde la perspectiva de la TAD y del EOS.

UNA MIRADA A LA SITUACIÓN DEL PUZLE POR LA TAD Y EL EOS

La TAD y el EOS comparten en su ADN, por así decirlo, esta forma de afrontar la Didáctica de las Matemáticas de la TSDM. En la situación del puzle descrita hay cuatro claves: 1) la noción de situación y el control sobre la actividad en el sistema didáctico; 2) cómo se generalizan los resultados; 3) la necesidad de realizar ejercicios de 'entrenamiento'; y, finalmente, 4) qué se entiende por álgebra. Estos cuatro aspectos tienen una interpretación en términos de la TAD y del EOS, a saber:

1. *Situación y control del sistema didáctico.* En la TSDM, la *situación* modeliza tanto el saber

matemático como su gestión en el *sistema didáctico* (por la definición del *medio antagonista*, el control de las *variables didácticas* y la estructura en fases de *acción*, *formulación*, *validación* e *institucionalización*). La TAD y el EOS proponen para ello dos herramientas teóricas diferenciadas; a saber, una para la dimensión epistemológica y otra para la didáctica.

— La TAD introduce la noción de *praxeología matemática* (PM) como una cuádrupla:

$$(t, T; \theta, \Theta) \equiv (\text{tarea, Técnica; tecnología, Teoría})$$

que permite modelizar el saber matemático; la *praxeología didáctica* como la organización de las PM en una institución y los medios utilizados para su control y funcionamiento en un proceso de estudio.

— El EOS introduce la noción de *significado pragmático* (sistema de prácticas operativas, discursivas y normativas), que junto con la noción de *configuración ontosemiótica* de prácticas, objetos y procesos modelizan los diversos significados institucionales del contenido matemático en cuestión (por ejemplo, la proporcionalidad) y los diversos tipos de objetos que intervienen en las prácticas implicadas.

  El análisis de los procesos de estudio se hace mediante la noción de configuración y *trayectoria didáctica* cuya dinámica está orientada hacia el logro de una alta *idoneidad* articulando la indagación /construcción y la transmisión del conocimiento.

2. *Generalización*. En la situación del puzle, toda vez que se ha respondido a la tarea inicial, por manipulación de la *variable didáctica* (qué segmento se transforma y qué valor toma en el nuevo puzle), se pone a prueba el conocimiento adquirido. Es decir, en la TSDM el *saber* se identifica con la noción que permite resolver clases de problemas. En este caso, el objetivo no es la construcción del puzle resultante de la ampliación primera (4 → 7), sino la comprensión por parte de los alumnos de teoremas esenciales de la proporcionalidad: "si sabemos la correspondencia de 1, podemos determinar el resto"; "la reducción a la unidad da la constante de proporcionalidad"; "no importa la representación utilizada, vale con decimales y con fracciones", etc.

   En consecuencia, dado que toda situación fundamental debe contar con *variables didácticas* para el progreso de los *conocimientos* de los alumnos (efectivos en los casos particulares) a la adquisición del *saber científico* pretendido (válido para la clase de problemas), se puede sostener la tesis según la cual toda situación fundamental incluye un componente esencialmente algebraico.

   De hecho, este rasgo de "generalización" es también asumido por la TAD, que sostiene que una praxeología matemática está más algebrizada que otra en tanto contiene más tipos generales de problemas, pudiéndose entonces establecer *grados de algebrización* entre praxeologías. De manera similar, en el EOS se asume que en las prácticas algebraicas los procesos de particularización-generalización son esenciales y la dualidad intensivo-extensivo condiciona el progreso en los distintos niveles de algebrización en las prácticas matemáticas.

3. *Ejercicios de entrenamiento*. La TSDM no modeliza este tipo de ejercicios. Así, asume una organización usual en las escuelas, donde la actividad matemática busca: a) introducir un saber, b) dotarlo de sentido o c) dominar su uso en tanto que instrumento. La TSDM, centrada en las situaciones adidácticas o con un componente adidáctico esencial, se ocupa esencialmente de modelizar los dos primeros tipos de actividades.

   La TAD denomina el *momento del trabajo de la técnica* a la organización didáctica cuyo objetivo es la *rutinización* de la técnica, que aumente su eficacia y limite su coste de ejecución en la institución. En el EOS, se trata de una práctica operativa cuyo objetivo es la maestría en un procedimiento. Por lo tanto, en estas dos perspectivas, TAD y EOS, se incorpora este tipo de actividad en una modelización global de la actividad matemática.

4. *Lo simbólico literal no se identifica con lo algebraico*. La actividad en la situación del puzle no busca la notación "$y = ax$", donde "a" es la constante de proporcionalidad. Tampoco busca el enunciado de proposiciones de la función lineal: 1) $f(ax) = af(x)$; 2) $f(x + y) = f(x) + f(y)$. La situación, en las distintas fases, evoluciona por ampliación del campo numérico (naturales, decimales y fracciones). Los grados de algebrización en la TAD y los niveles de algebrización en el EOS son consistentes con esta premisa, dado que atribuyen a la notación una función en el proceso de algebrización, pero no limitan éste a la cristalización de los enunciados mediante variables, parámetros, funciones, etc. De hecho, esta tesis está asimismo fundamentada en el programa *Early Algebra*.

En las ponencias que siguen, Josep Gascón y de Juan D. Godino aportarán una visión más profunda de los aportes, alcance y poder heurístico de la TAD y del EOS, respectivamente, para comprender el desarrollo del pensamiento algebraico y para elaborar propuestas didácticas viables en las aulas.

Referencias

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques en mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. y Brousseau, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : IREM. [Recuperable en (17/05/2017): https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00610769/fr/].

Cai, J. y Knuth, E. (Eds.) (2011). *Early Algebraization*. Berlin: Springer-Verlag.

Davydov, V. V. (2000). Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. *Soviet Studies in Mathematics Education* (Vol. 2). Reston Virginia: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). [Recuperable en (20/05/2017): https://www.marxists.org/archive/davydov/generalization/generalization.pdf].

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education* (pp. 271-290). Seville, Spain: SAEM Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151. [Recuperable en (10/05/2017): http://tme.journals.libs.uga.edu/index.php/tme/index].

Kieran, C., Pang, JS., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). *Early Algebra*. Hamburg: Springer. [Recuperable en (15/05/2017): https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-319-32258-2].

Lupiáñez, J. L. (Coord.), González Marí, J. L., Gil, F., Arnau, D. y Moreno, A. (2015). Investigaciones sobre pensamiento numérico y algebraico. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 17-65). Alicante: SEIEM.

Paralea, M. (Coord.), Castro E. y Puig, L. (2012). Fines de la investigación en pensamiento algebraico. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 71 - 95). Jaén: SEIEM.

Schmittau, J. y Morris, A. (2004). The Development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 60-87.
[Recuperable en (13/05/2017): http://tme.journals.libs.uga.edu/index.php/tme/index]

Sutherland, R. (1997). *Teaching and learning algebra pre-19*. London: The Royal Society. Recuperable en (18/05/17): https://royalsociety.org/~/media/Royal_Society_Content/policy/publications/1997/10183.pdf

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27(1), 77-120. [English version, 2011: *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics) 21*, 53-82. [Disponible en (01/11/16): http://math.unipa.it/%7Egrim/Wilhelmi_Q21.pdf].

[1] Trabajo realizado en el marco del proyecto EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad